Strumenti matematici

1

Strumenti matematici

- Introduzione al problema fisico
- Base di uno spazio vettoriale
- Serie di Fourier

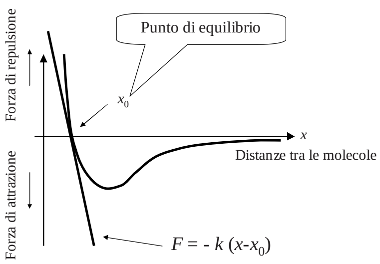
Strum. mat. 1

- Serie di Taylor
- Numeri complessi
- Equazioni differenziali

Strum. mat. 2

2

La forza intermolecolare



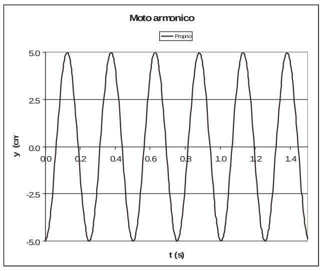
Vicino al punto di equilibrio la forza intermolecolare si comporta come una forza elastica: $F=-k\cdot\Delta x$

Questo comportamento si trasmette anche per forze in strutture macroscopiche (ad esempio: edifici, ponti, macchine, ecc.).

3

Modello fisico

Un sistema, dove agisce una forza elastica, perturbato dalla posizione di equilibrio, compie un moto armonico.



Il periodo, *T* : Il tempo per un'oscillazione completa

La frequenza: Il numero di oscillazioni in un unità di tempo
$f = 1 / T$

La frequenza angolare:

$$\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

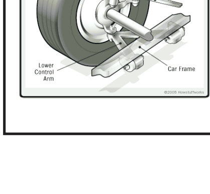
4

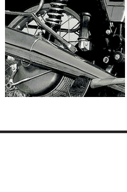
Moto armonico

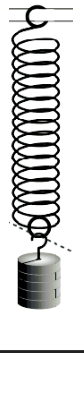
Studiamo un sistema di una molla con una massa

Interpretazione in un sistema reale?

Un esempio:

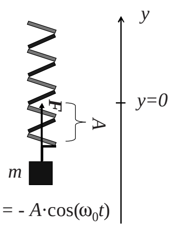






5

Modello fisico del moto armonico



$y(t) = - A\cdot\cos(\omega_0 t)$

Il periodo, *T* : Il tempo per un'oscillazione completa

La frequenza: Il numero di oscillazioni in un unità di tempo
$f = 1 / T$

La frequenza angolare:

$$\omega_0 = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

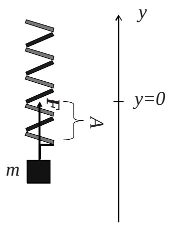
- Molla più rigida (più grande k) $\Rightarrow$ T diminuisce
- Massa più grande $\Rightarrow$ T aumenta

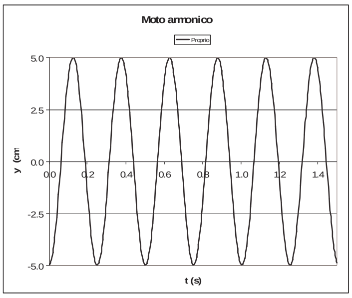
6

Moto armonico – esempio numerico

k = 250 N/m m = 0,40 kg A = 5,0 cm
ω_0 = 25,0 rad/s f_0 = 3,98 s^{-1} T_0 = 0,251

$\boxed{y(t) = -5{,}0 \cdot \cos(25{,}0 \cdot t)}$



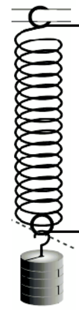


Smorzamento

In un sistema reale esiste sempre un po' di smorzamento del moto armonico. Per modellare questo andamento aggiungiamo un ammortizzatore nel nostro modello

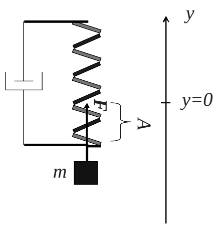
Nel nostro modello la forza di smorzamento è proporzionale alla velocità della molla:

$F_{smorz} = -b \cdot v_y$



8

Modello fisico del moto armonico



Se lo smorzamento non è troppo grande ($b<2m\omega_0$)

$$y(t) = -A\mathrm{e}^{-(b/2m)t}\cos(\omega t)$$

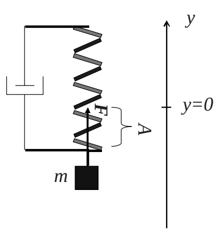
$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}$$

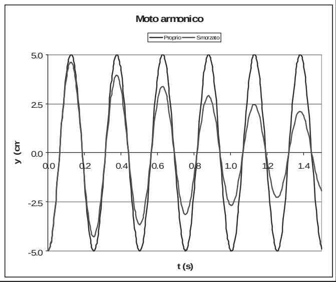
9

Moto armonico – esempio numerico

k = 250 N/m m = 0,40 kg A = 5,0 cm b = 0,50 kg·s^{-1}
ω = 25,0 rad/s f = 3,98 s^{-1} T = 0,251 $b/2m$ = 0,625 s^{-1}

$y(t) = -5{,}0\mathrm{e}^{-0{,}625 \cdot t} \cos(25{,}0 \cdot t)$

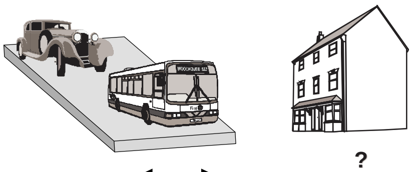




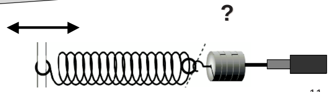
Risonanza e modelli fisici

Supponiamo che il traffico causi una vibrazione nella terra sotto una strada.

Cosa potrebbe succedere a un edificio?



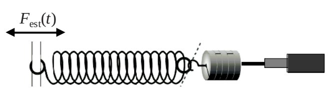
Modello fisico:



11

Moto armonico forzato

Modello fisico:
Un sistema di una molla con una massa e smorzamento. Sul sistema viene applicata una forza periodica esterna



Se $F_{est}(t) = B \cdot \cos(\omega t)$, il sistema oscilla con la frequenza ω.

- Se ω è diversa di ω_0: L'ampiezza delle oscillazioni è "piccola"
- Se $\omega \approx \omega_0$: l'ampiezza può diventare molto grande, fino alla rottura del sistema

Risonanza!

12

Risonanza in un sistema reale

13

Risonanza in un sistema reale

14

Risonanza in un sistema reale

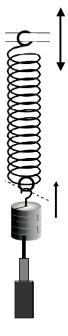
15

Risonanza in un sistema reale

16

Moto forzato – la soluzione generale

$A \cdot \cos(\omega t)$



$y(t)$

$$y(t) = B \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi)$$

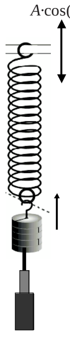
$$B = \frac{A \cdot k}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m}}$$

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{b\omega/m}\right)$$

17

Moto forzato – esempio numerico

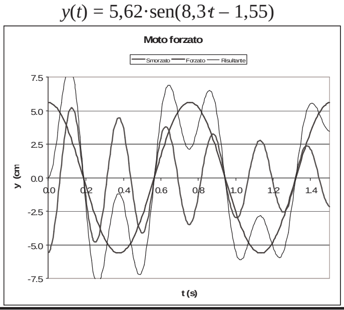
$A \cdot \cos(\omega t)$



$y(t)$

k = 250 N/m	m = 0,40 kg	A = 5,0 cm
b = 0,50 kg·s^{-1}	ω = 8,3 rad/s	
ω_0 = 25,0 rad/s	B = 5,62 cm	ϕ = -88,9° = -1,55 rad

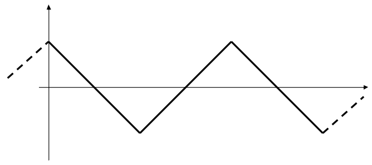
$$y(t) = 5{,}62 \cdot \mathrm{sen}(8{,}3t - 1{,}55)$$



18

Se la forza esterna non è armonica?

Una forza del tipo:



potrebbe causare risonanza anche se $\omega \neq \omega_0$?

19

Parentesi !

Approfondimenti su strumenti di matematica

20

Base di uno spazio vettoriale

La base di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio

Una base ortonormale di uno spazio vettoriale, munito di prodotto scalare definito positivo, è una base composta da vettori di norma unitaria e ortogonali tra loro

$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ e $\boldsymbol{e}_z$ è una base ortonormale se:
$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = 1$; $\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = 1$; $\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1$;
$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = 0$; $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z = 0$; $\boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = 0$;

Il prodotto · è un prodotto scalare (o prodotto interno):
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos(\theta)$, dove θ è l'angolo tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

21

Lo spazio vettoriale

In una base ortonormale di uno spazio vettoriale, ogni vettore può essere scritto

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z$$

$a_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_x$, $a_y = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_y$, $a_z = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_z$
si chiamano le coordianate di $\boldsymbol{a}$
e spesso si usa la notazione:
$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$

Prodotto scalare: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Norma: $a^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$

22

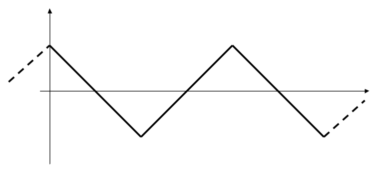
Lo spazio vettoriale - esercizi

1. Calcola la somma tra $\boldsymbol{a}=(4,1)$ e $\boldsymbol{b}=(-1,2)$.
2. Calcola il prodotto scalare tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
3. Calcola le lunghezze di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
4. Calcola l'angolo tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.
   Verifica il risultato con una rappresentazione grafica.
5. Scrivi $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ e $\boldsymbol{e}_z$ nella forma (a_x, a_y, a_z).
6. Se $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{e}_x + a_y \boldsymbol{e}_y + a_z \boldsymbol{e}_z$, dimostra che $a_x = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_x$, ecc.
7. Dimostra che $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
8. Dimostra che le coordinate a_x, a_y, a_z sono unici.
9. Nel piano dimostra che il vettore $\boldsymbol{u}=(a,b)$ è perpendicolare alla retta $ax+by+c=0$.

23

Se la forza esterna non è armonica?

Una forza del tipo:



potrebbe causare risonanza anche se $\omega \neq \omega_0$?

24

Parentesi 2 !

Ancora approfondimenti su strumenti di matematica

Base di funzioni periodiche

Le funzioni
$\cos(n\Omega t)$ e $\sin(n\Omega t)$, n=0,1,2, ...
costituiscono una base per tutte le funzioni periodiche con periodo T ($\Omega T=2\pi$).

Il prodotto interno, $\langle ...|...\rangle$, è dato da

$\langle f(t)|g(t)\rangle =$ (2/T)·{L'area sotto la curva f(t)g(t) nell'intervallo [0,T].}

$$\langle f(t)|g(t)\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$$

Base di funzioni periodiche

Usando

$\cos^2(n\Omega t) = [1+\cos(2n\Omega t)]/2$

e

$\text{sen}^2(n\Omega t) = [1-\cos(2n\Omega t)]/2$

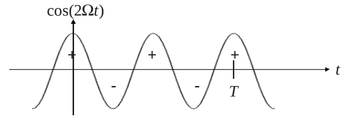
segue che,

- $\langle\cos(n\Omega t) \mid \cos(n\Omega t)\rangle=1$ per k=1,2, ...
- $\langle\text{sen}(n\Omega t) \mid \text{sen}(n\Omega t)\rangle=1$ per k=1,2, ...
- $\langle\cos(n\Omega t) \mid \cos(n\Omega t)\rangle=2$ per k=0

Esercizio!

Base di funzioni periodiche

L'area sotto le curve $\cos(n\Omega t)$ e $\sin(n\Omega t)$ nel intervallo [0,T] è sempre uguale a zero per n=1,2, ...



Usando le identità trigonometriche segue che,

- $\langle\cos(n_1\Omega t) \mid \text{sen}(n_2\Omega t)\rangle=0$ per n_1=0,1,2, ... , n_2=1,2, ...
- $\langle\cos(n_1\Omega t) \mid \cos(n_2\Omega t)\rangle=0$ per $n_1 \neq n_2$
- $\langle\text{sen}(n_1\Omega t) \mid \text{sen}(n_2\Omega t)\rangle=0$ per $n_1 \neq n_2$

Esercizio!

Serie di Fourier

La serie di Fourier è una rappresentazione di una funzione periodica mediante una combinazione lineare di funzioni sinusoidali fondamentali:

Se f(t) è una funzione periodica con periodioT, la sua serie trigonometrica di Fourier è data da:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\Omega t) + b_n \text{sen}(n\Omega t)\right)$$

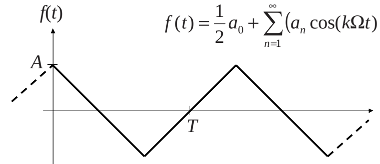
con: $a_n = \langle f(t) \mid \cos(n\Omega t)\rangle$

Se $f(t)$ è pari $\Rightarrow b_n=0$

Se $f(t)$ è dispari $\Rightarrow a_n=0$

Serie di Fourier - Esempio

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(k\Omega t) + b_n \text{sen}(k\Omega t)\right)$$

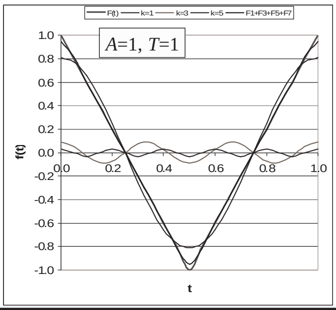


$$a_n = \begin{cases} 8A/(n\pi)^2 & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

$b_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, 4, \dots$

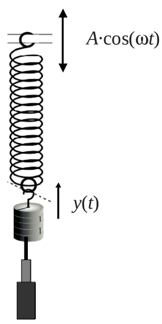
Serie di Fourier - Esempio

$$f_F(t) = \frac{8A}{\pi^2}\cos(\omega t) + \frac{8A}{9\pi^2}\cos(3\omega t) + \frac{8A}{25\pi^2}\cos(5\omega t) + \ldots$$



31

Moto forzato – la soluzione generale



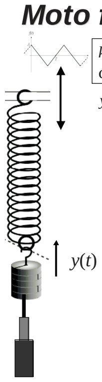
$y(t) = B \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi)$

$$B = \frac{A \cdot k}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m}}$$

$$\phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{b\omega/m}\right)$$

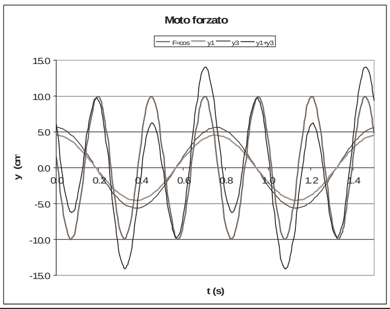
32

Moto forzato – esempio numerico



k = 250 N/m m = 0,40 kg A = 5,0 cm b = 0,50 kg·s^{-1}
ω = 8,3 rad/s T = 0,76 s ω_0 = 25,0 rad/s

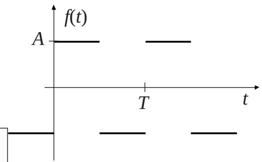
$y_1(t) = 4{,}55 \cdot \mathrm{sen}(8{,}3 \cdot t - 1{,}55)$ $y_3(t) = 9{,}44 \cdot \mathrm{sen}(24{,}9 \cdot t - 0{,}16)$



33

Serie di Fourier - Esercizi

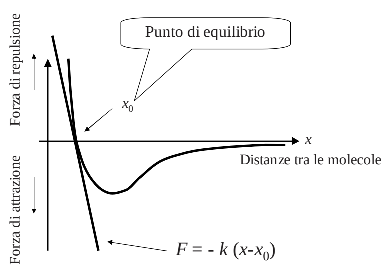
- Rappresenta graficamente la serie di Fourier con i coefficienti:
  a_0=1, a_n=4/($\pi^2 n^2$), n=1, 3, 5, …; a_n=0, n=2, 4, 6, … b_n=0
- Calcola i primi 5 coefficienti di Fourier per la funzione periodica nel grafico.
  Rappresenta la serie di Fourier in un grafico.



- Usando $\cos^2(n\Omega t) = [1+\cos(2n\Omega t)]/2$ e $\mathrm{sen}^2(n\Omega t) = [1-\cos(2n\Omega t)]/2$ dimostra che,
- $\langle\cos(n\Omega t) \mid \cos(n\Omega t)\rangle=1$ per k=1,2, ...
- $\langle\mathrm{sen}(n\Omega t) \mid \mathrm{sen}(n\Omega t)\rangle=1$ per k=1,2, ...
- $\langle\cos(n\Omega t) \mid \cos(n\Omega t)\rangle=2$ per k=0

Usando le identità trigonometriche dimostra che,
- $\langle\cos(n_1\Omega t) \mid \mathrm{sen}(n_2\Omega t)\rangle=0$ per n_1=0,1,2, ... , n_2=1,2, ...
- $\langle\cos(n_1\Omega t) \mid \cos(n_2\Omega t)\rangle=0$ per $n_1 \neq n_2$
- $\langle\mathrm{sen}(n_1\Omega t) \mid \mathrm{sen}(n_2\Omega t)\rangle=0$ per $n_1 \neq n_2$

Serie di Maclaurin e Taylor



Vicino al punto di equilibrio la forza intermolecolare si comporta come una forza elastica: $F=-k \cdot \Delta x$

Per migliorare l'approssimazione di F si potrebbe rappresentarla come un polinomio di grado 2: $F = a_0 + a_1 \cdot \Delta x + a_2 \cdot \Delta x^2$.

35

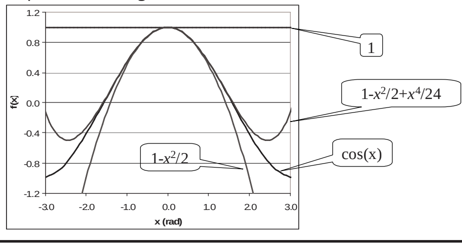
Serie di Maclaurin e Taylor

Idea: rappresentare una funzione con un polinomio di grado infinito

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Se $|a_k x^k| \to 0$ quando $k \to \infty$ si può approsimare $f(x)$ con un polinomio di grado finito

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k$$



36

Serie di Maclaurin e Taylor

Se f(x) è infinitamente derivabile in un intervallo attorno $x=0$ (Maclaurin), oppure attorno $x=a$ (Taylor) e le derivate sono limitate , $f(x)$ può essere rappresentata con la sua serie di Maclaurin o di Taylor

Serie di Maclaurin $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Serie di Taylor $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

37

Serie di Maclaurin e Taylor

Maclaurin $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ Taylor $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Esercizio 1: Dimostra le seguenti serie:

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad \cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \mathrm{sen}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Esercizio 2: Calcola le seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}=\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}=\frac{\mathrm{sen}\,x-x}{x(\cos x-1)}$$

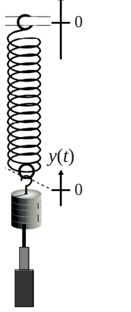
Esercizio 3: Approssima $\sqrt{1+x}$ con il suo polinomio di Taylor di grado 1 per calcolare $\sqrt{29}$ senza la calcolatrice

Esercizio 4: Calcola $\int_0^{0,25}\frac{\mathrm{sen}\,x^2}{x}dx$ con tre cifre decimali.

38

Moto forzato – l'equazione

$s(t)=A\cdot\cos(\omega t)$



La forza elastica esercitata su m:

$F_{el}(t)= - k\cdot[y(t)-s(t)]$

La forza di smorzamento esercitata su m:

$F_{sm} = -b\cdot v_y = -b\cdot y'(t)$

La forza risultante esercitata su m:

$F_{Ris}(t) = F_{el}(t) + F_{sm}(t)$

La seconda legge della dinamica:

$F_{Ris}(t) = ma_y(t) = my''(t)$

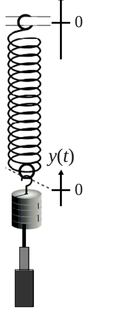
$\Rightarrow$ $- k\cdot[y(t)-s(t)] - b\cdot y'(t) = my''(t)$

$\Rightarrow$ $y''(t) + (b/m)\, y'(t) + (k/m)y(t) = (kA/m)\cos(\omega t)$

39

Equazioni differenziali

$s(t)=A\cdot\cos(\omega t)$



$\boxed{y''(t) + (b/m)\, y'(t) + (k/m)y(t) = (kA/m)\cos(\omega t)}$

Un'equazione che contiene una funzione e derivate della funzione si chiama un'equazione differenziale

Per certi tipi di equazioni esistono metodi di soluzione analitica per risolvere un'equazione differenziale. In altre casi si può trovare una soluzione tramite metodi numerici.

40

Equazioni differenziali

$\boxed{y''(t) + (b/m)\, y'(t) + (k/m)y(t) = (kA/m)\cos(\omega t)}$

- Si chiama ordine o grado dell'equazione il grado della più alta derivata presente.
- Si chiama equazioni differenziali ordinarie se la funzione incognita y è funzione solo di t.
- Un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine, con coefficienti costanti ha la forma:
  $y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = f(t)$
  dove a e b sono costanti reali (o complessi).

41

Equazioni differenziali

$\boxed{y''(t) + (b/m)\, y'(t) + (k/m)y(t) = (kA/m)\cos(\omega t)}$

- Per risolver un'equazione differenziale lineare ordinaria del secondo ordine, con coefficienti si consideri l'equazione differenziale omogenea associata:
  $y''(t) + a\, y'(t) + b\, y(t) = 0$
- La sua risoluzione consiste nel cercare una soluzione del tipo:
  $y(t) = \mathrm{e}^{kt}$
- Sostituendo $y(t) = \mathrm{e}^{kt}$ nella equazione omogenea, derivando si ottiene
  $\mathrm{e}^{kt}\cdot(k^2 + a\cdot k + b) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^2 + a\cdot k + b = 0$
- Se le sue radici sono distinte, allora la soluzione è del tipo:
  $y_{om}(t) = c_1\, \mathrm{e}^{k1t} + c_2\, \mathrm{e}^{k2t}$

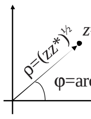
42

Numeri e funzioni complessi

Un numero complesso e del tipo $z = x + \mathrm{i}y$
dove x e y sono reali e i ha la proprietà: $\mathrm{i}^2 = -1$

Il numero coniugato a z è $z^* = x - \mathrm{i}y$
Vale: $|z|^2 = zz^* = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2+y^2$

Il numero z può essere rappresentato nel piano complesso



$z = x + \mathrm{i}y = \rho\cdot(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\mathrm{sen}\varphi) = \rho\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$

La formula può essere dimostrata usando le serie di Taylor di e^x mettendo $x = \mathrm{i}\varphi$

Funzioni complessi:

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\,sen\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} - e^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}$$

43

Equazioni differenziali

Trova la soluzione generica all'equazione:

$$y''(t) + (b/m)\,y'(t) + (k/m)y(t) = (kA/m)\cos(\omega t)$$

con $b=0$, $m=0{,}4$ kg, $k=250$ N/m, $A=0$

- La sua risoluzione consiste nel cercare una soluzione del tipo: $y(t) = e^{kt}$
- Sostituendo $y(t) = e^{kt}$ nella equazione omogenea, derivando si ottiene
  $e^{kt}\cdot(k^2 + a\cdot k + b) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + a\cdot k + b = 0$
- Se le sue radici sono distinte, allora la soluzione è del tipo:
  $y_{om}(t) = c_1\, e^{k1t} + c_2\, e^{k2t}$

Determina le costanti c_1 e c_2 assumendo le condizioni iniziali: $y(0)=5{,}0$ cm e $y'(0)=0$ cm/s.

44

Equazioni differenziali

L'equazione completa ha la forma:

$$y''(t) + a\cdot y'(t) + b\cdot y(t) = f(t)$$

Per determinare le soluzioni è sufficiente aggiungere alla generica soluzione dell'equazione omogenea associata , $y_o(t)$, una soluzione particolare , $y_p(t)$, della non omogenea.

Se $f(t) = A\cdot\cos(\omega t)$ si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$y_p(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\mathrm{sen}(\omega t)$$

45

Equazioni differenziali

Trova la soluzione particolare all'equazione:

$$y''(t) + (b/m)\,y'(t) + (k/m)y(t) = (kA/m)\cos(\omega t)$$

con $b=0$, $m=0{,}4$ kg, $k=250$ N/m, $A=5{,}0$ cm

Se $f(t) = A\cdot\cos(\omega t)$ si cerca una soluzione particolare del tipo:

$y_p(t) = C_1\cos(\omega t) + C_2\mathrm{sen}(\omega t)$

La soluzione completa è data da: $y(t) = y_o(t) + y_p(t)$

Determina le costanti c_1 e c_2 (dall'equazione omogenea) assumendo le condizioni iniziali: $y(0)=0{,}0$ cm e $y'(0)=0$ cm/s.

46