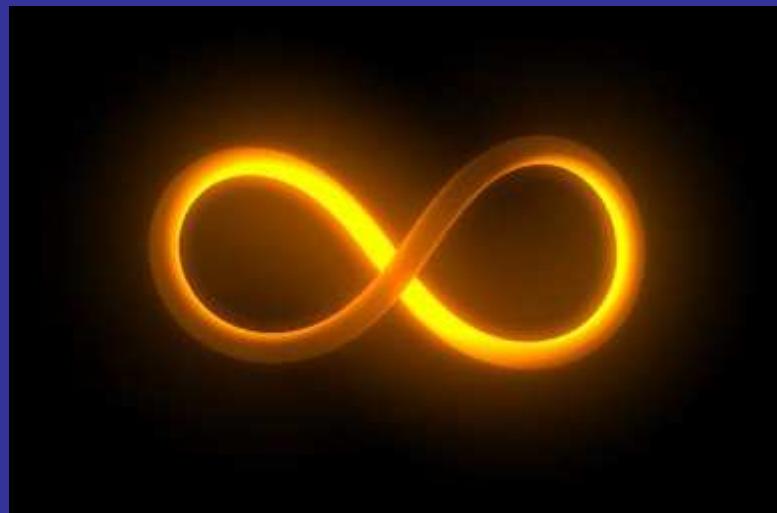


# Il fascino dell'Infinito

Infinito e cardinalità.



Simbolo del nodo d'amore, *Wallis 1655*

Prof. Resta Lorenza

Faenza, mercoledì 14 Marzo

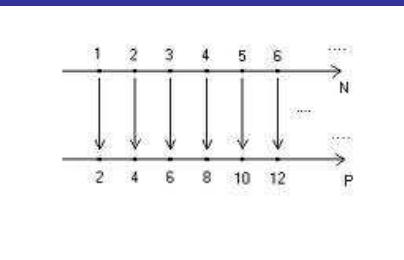


# Alcuni termini

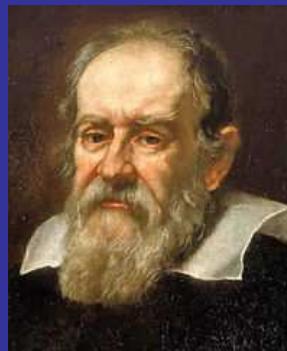
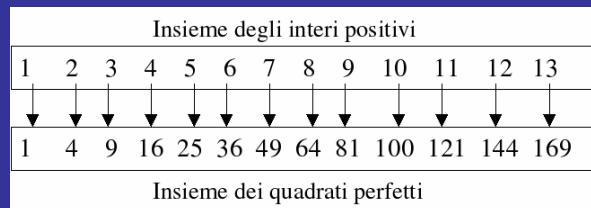
- Insiemi equipotenti
- Insieme infinito ed insieme finito

# Confronto tra insiemi numerici 1

- Confronto tra  $\mathbb{N}$  e numeri pari (oppure i multipli di un numero)



- Confronto tra  $\mathbb{N}$  e l'insieme dei quadrati di numeri naturali

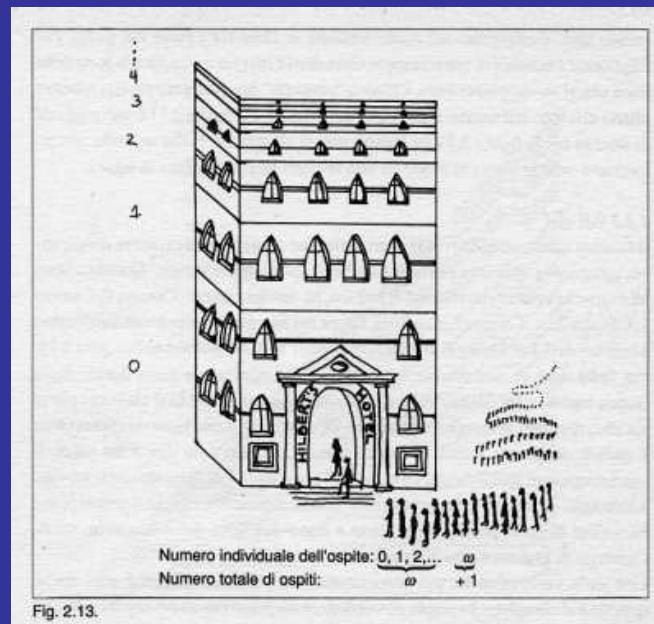


- Sfida: L'albergo paradiso di Hilbert

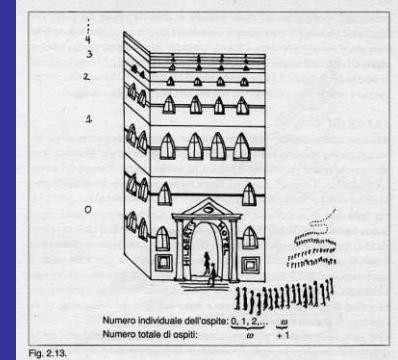


# Albergo paradiso

- *Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, ed afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito.*



# Albergo paradiso



- *Nel caso semplice, arriva un singolo nuovo ospite. Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno è comunque, essendo infinito, possibile sistemare il nuovo ospite.*
- *Un caso meno intuitivo si ha quando arrivano infiniti nuovi ospiti. Sarebbe possibile procedere nel modo visto in precedenza, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti (già spazientiti dal precedente spostamento): sostiene allora Hilbert che la soluzione sta semplicemente nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4, etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.*





# Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

## Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

### CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

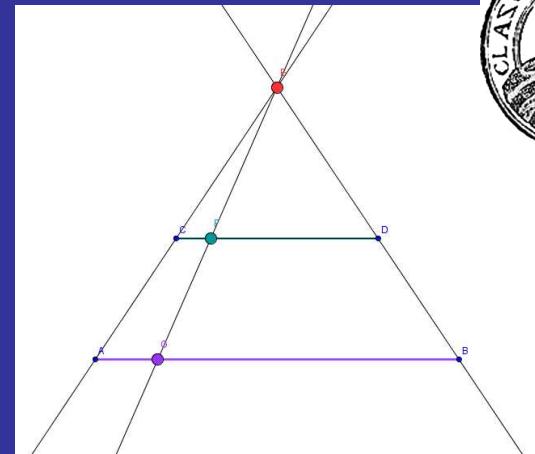
Tema di: MATEMATICA

#### QUESTIONARIO

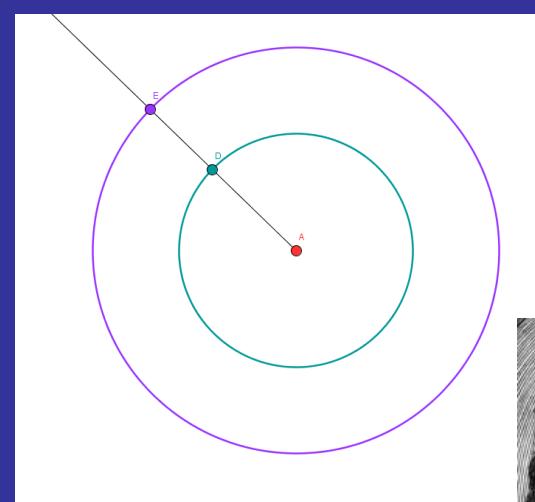
1. Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.
2. Si trovi il punto della curva  $y = \sqrt{x}$  più vicino al punto di coordinate  $(4; 0)$ .
3. Sia  $R$  la regione delimitata, per  $x \in [0, \pi]$ , dalla curva  $y = \sin x$  e dall'asse  $x$  e sia  $W$  il solido ottenuto dalla rotazione di  $R$  attorno all'asse  $y$ . Si calcoli il volume di  $W$ .
4. Il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi  $n$ .
5. In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme  $N$  dei numeri naturali ( "i numeri tutti"). Dice Salviati: «....se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?
6. Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?
7. Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?
8. In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perchè è citato così spesso?

# Confronto tra oggetti geometrici 1

- Segmenti di diversa lunghezza

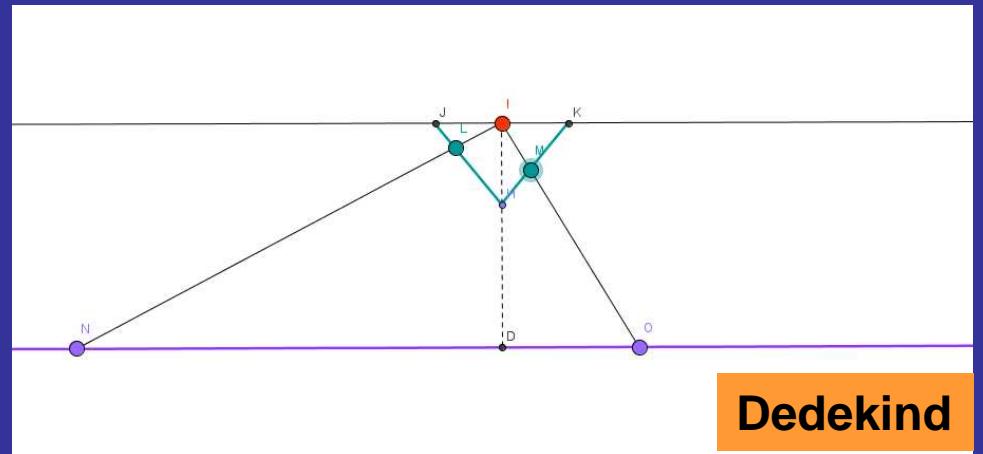


- Circonferenze di diverso raggio

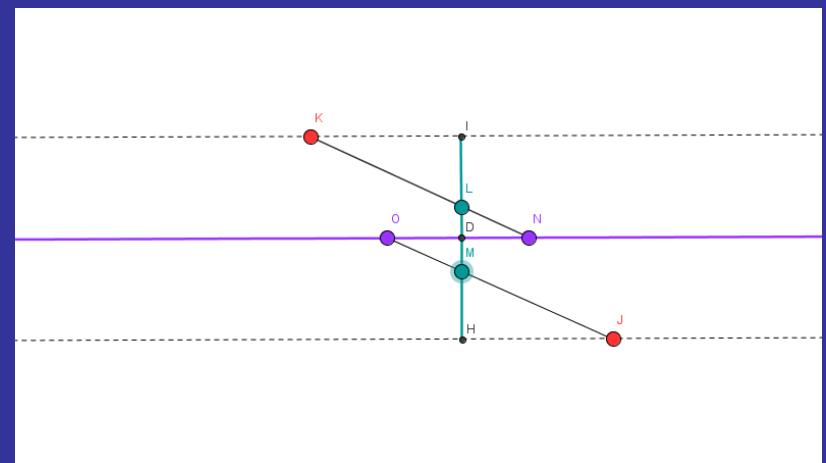
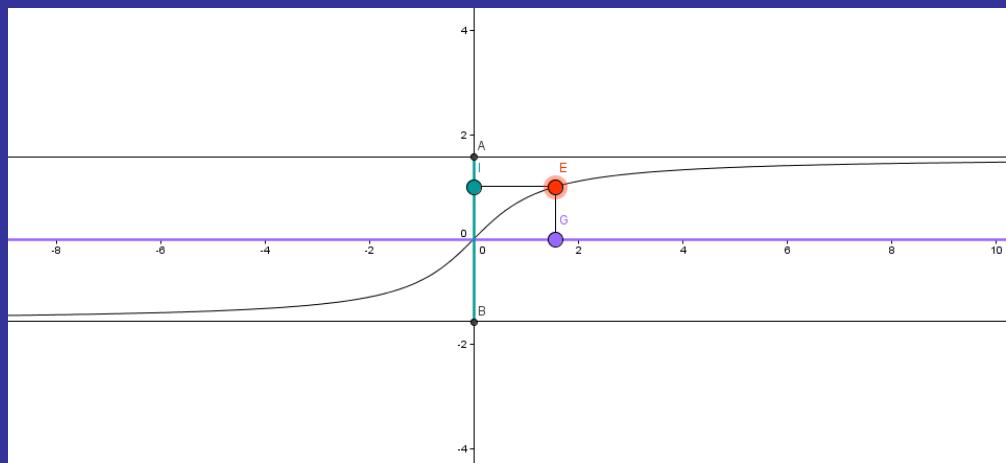


# Confronto tra oggetti geometrici 2

- Segmento e retta

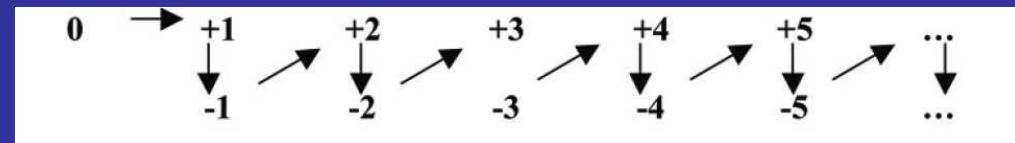


Dedekind



# Confronto tra insiemi numerici 2

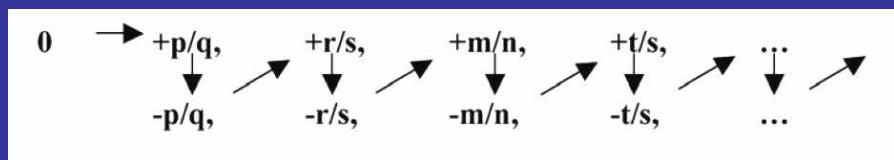
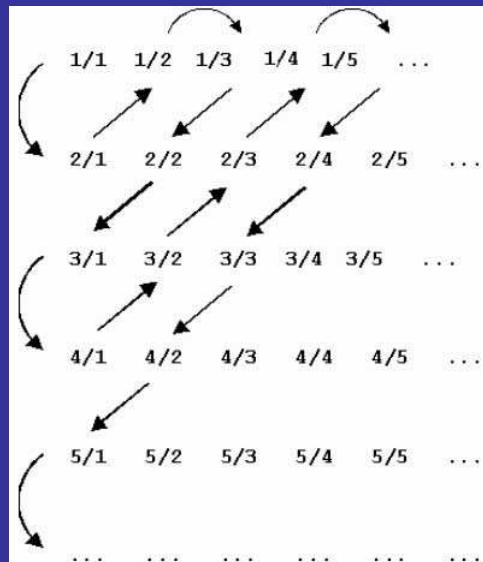
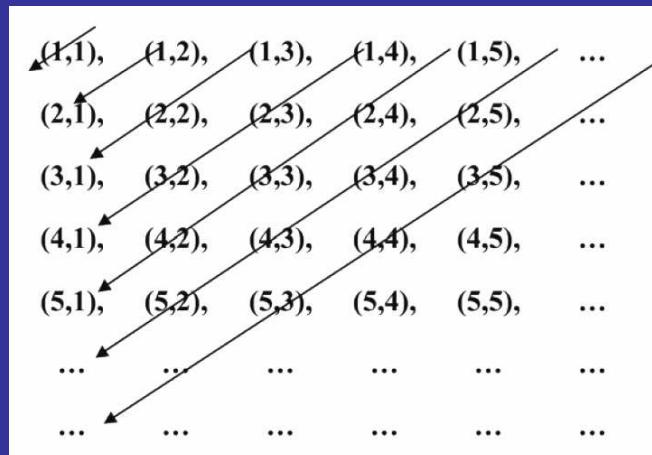
- Confronto tra  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	....
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	....

# Confronto tra insiemi numerici 3

- Confronto tra  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Q}$



# Confronto tra insiemi numerici 4

Confronto tra N e R

Confronto tra N e  $]0,1[$

Cantor: celebre metodo diagonale

$f(0)$	=	0.	1	4	9	2	2	0	3	...
$f(1)$	=	0.	2	3	7	2	7	2	1	...
$f(2)$	=	0.	1	3	2	1	8	2	5	...
$f(3)$	=	0.	8	1	7	6	1	7	8	...
$f(4)$	=	0.	7	6	8	3	8	9	5	...
$f(5)$	=	0.	5	7	6	5	7	1	3	...
$f(6)$	=	0.	4	9	9	4	3	1	4	...
$\vdots$	...									
$r$	=	0.	2	2	1	1	1	2	1	...

$$\alpha_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} \dots$$

\

$$\alpha_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} a_{26} \dots$$

\

$$\alpha_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} a_{36} \dots$$

\

...

\

$$\alpha_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} a_{n4} \dots a_{nn} \dots$$

\



# Non poteva mancare..

$$x = 0,3\overline{9}$$

$$\left. \begin{array}{l} 100 \cdot x = 39, \overline{9} \\ 10 \cdot x = 3, \overline{9} \end{array} \right\} \quad 90 \cdot x = 36 \quad x = 0,4$$

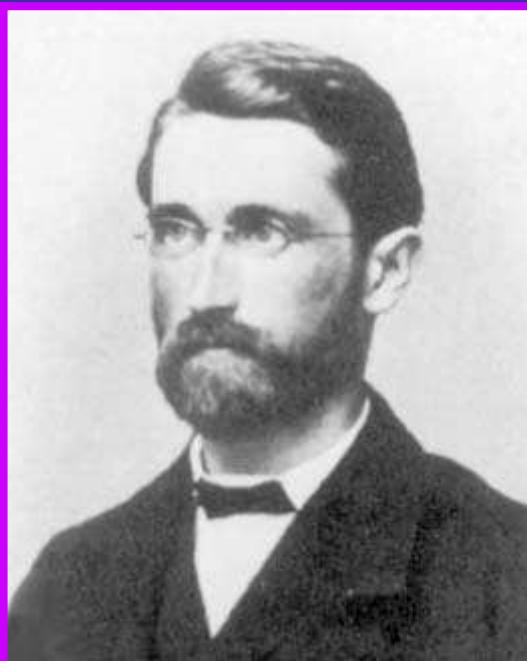
Figura 2 Dimostrazione del fatto che  $0,3\overline{9} = 0,4$



# Aspro dibattito



**Georg Cantor,**  
matematico  
tedesco  
(1845-1918)



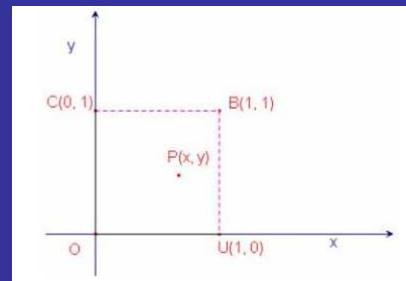
**Julius Dedekind,**  
matematico  
tedesco  
(1831-1916)



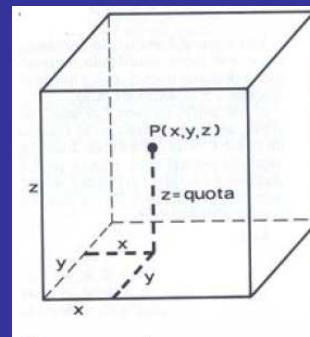
**Leopold Kronecker,**  
matematico tedesco  
(1823-1891)

# Confronto tra insiemi numerici 5

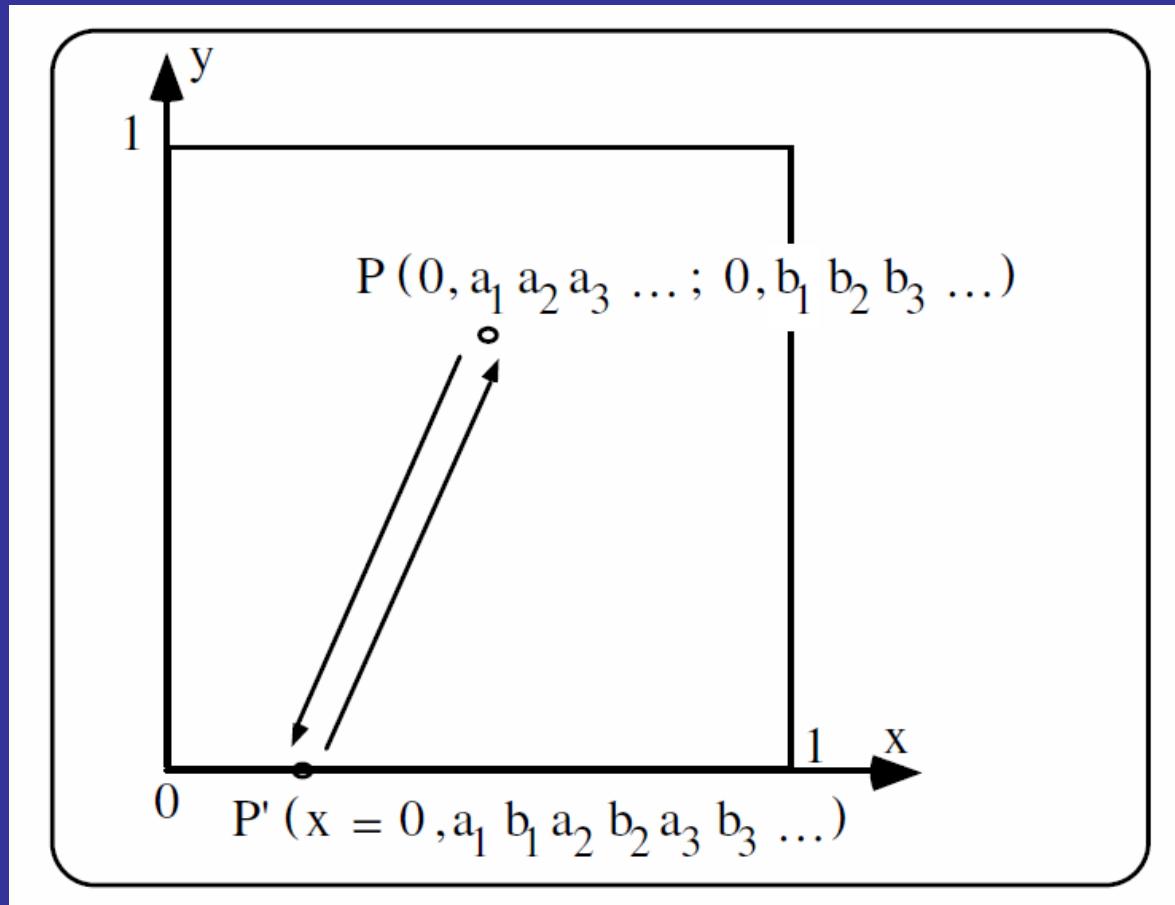
- Confronto tra  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



- Confronto tra  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^3$

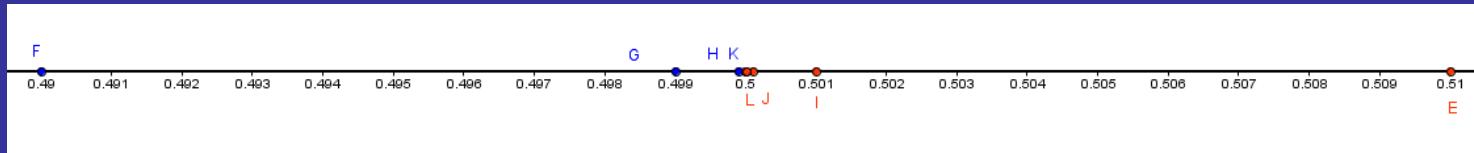


- *Ma tali oggetti hanno diversa dimensione?*



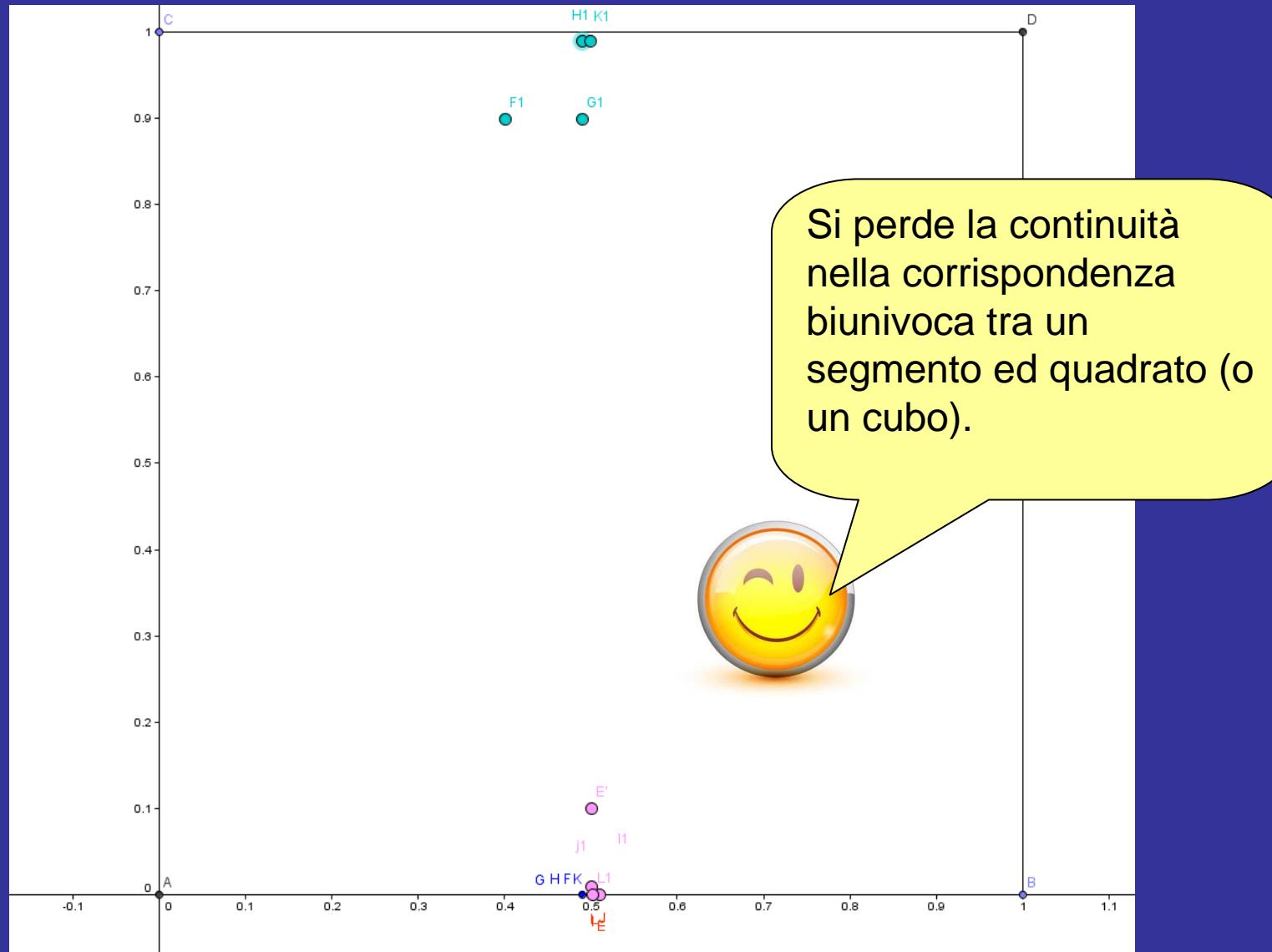
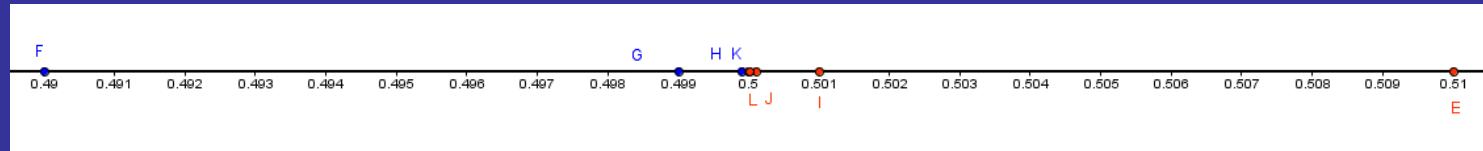
*“Lo vedo ma non lo credo.” Cantor*





Approssimazioni per difetto di $\frac{1}{2}$	
Punti sul segmento orizzontale $(x, 0)$	Punti corrispondenti sul quadrato
0,49	(0,4;0,9)
0,499	(0,49;0,9)
0,4999	(0,49;0,99)
0,49999	(0,499;0,99)
0,499999	(0,499;0,999)

Approssimazioni per eccesso di $\frac{1}{2}$	
Punti sul segmento orizzontale $(x, 0)$	Punti corrispondenti sul quadrato
0,51	(0,5;0,1)
0,501	(0,51;0,0)
0,5001	(0,50;0,01)
0,50001	(0,501;0,01)
0,500001	(0,500;0,001)



# Diversi tipi di cardinalità

$\aleph_0$

$\aleph_0$  Aleph 0, cardinalità del numerabile:  
 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

**Aleph** è il nome della prima lettera dell' alfabeto fenicio ed ebraico.

$\aleph_1$

$\aleph_1$  Aleph 1, cardinalità del continuo:  
 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^3, \dots \mathbb{R}^n$

- Esistono altri transfiniti?  
 $\aleph_2, \aleph_3, \dots$

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$

“L’aritmetica transfinita è il prodotto più stupefacente del pensiero matematico, una delle più belle creazioni dell’attività umana nel campo dell’intelligibile”

...

“Nessuno ci scacerà mai più dal paradiso che Cantor ha creato per noi”.

David Hilbert,  
(1862 - 1943)



# Una domanda cruciale

Esistono altre cardinalità tra  $\aleph_0$  e  $\aleph_1$  ?

- Ipotesi del continuo IC
- Ipotesi del continuo generalizzata ICG

# Alcune analogie



- Teoria degli insiemi cantoriana
- Teoria non cantoriana

Contributi di Cohen, Göedel



- Geometrie euclidee
- Geometrie non euclidee

# La prossima avventura...

- Coerenza
- Indipendenza
- Completezza
- Sistemi formali, sintassi e semantica.

# Un parere autorevole

*“La mancanza di una didattica specifica della problematica connessa al concetto di infinito (in particolare dei cardinali transfiniti) toglie incisività e chiarezza ad alcuni argomenti di notevole importanza, tra i quali la concezione della continuità dell’insieme dei numeri reali.”*

*G.T. Bagni*

# Bibliografia

- **Cos'è la Matematica?** *Richard Courant, Herbert Robbins*
- **Infiniti,** *Bruno D'amore, Gianfranco Arrigo*
- **Discreto, denso, continuo: le concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi e l'introduzione dei reali,** pdf di G.T.Bagni
- **L'infinito Matematico tra mistero e ragione,** *Therese Gilbert, Nicolas Rouche*
- **50 Grandi idee di matematica,** *Tony Crilly*
- [http://www.consiglio.regione.toscana.it/news-ed-eventi/pianeta-galileo/atti/2005/04\\_infinito.pdf](http://www.consiglio.regione.toscana.it/news-ed-eventi/pianeta-galileo/atti/2005/04_infinito.pdf)
- [http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argomenti/APPUNTI/TESTI/Ott\\_03/Cap1.html](http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argomenti/APPUNTI/TESTI/Ott_03/Cap1.html)
- <http://matematica-old.unibocconi.it/infinito/infinito.htm>
- <http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/romagnoli/bell.pdf>
- **Fumetto: Ultima lezione a Gottinga,** *Davide Osenda*

**“L’essenza della  
Matematica è la  
sua libertà”**

**Cantor**



**Grazie per l’attenzione!**